Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций
в 2019-2020 учебном году
10 класс
Очный тур. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). В закрытом с обоих концов теплоизолированном горизонтально расположенном цилиндре есть тонкий теплопроводящий невесомый поршень, делящий цилиндр на две части, и могущий двигаться без трения. В одной части цилиндра находится молекулярный водород массы $m_в = 3$ г. В другой части цилиндра находится молекулярный кислород массы $m_к = 16$ г. Найти отношение объемов η ($\eta = V_в/V_к$), занимаемых газами. Молекулярные массы газов: $\mu_в = 2$ г/моль, $\mu_к = 32$ г/моль.

Решение:

Запишем уравнение состояния каждого газа в своей части цилиндра.

$$PV_в = \nu_в RT = \frac{m_в}{\mu_в} RT.$$

$$PV_к = \nu_к RT = \frac{m_к}{\mu_к} RT.$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получим, что искомое нами отношение определяется отношением числа молей данных газов.

<u>Ответ:</u> $\eta = \frac{V_в}{V_к} = \frac{\nu_в}{\nu_к} = \frac{m_в}{\mu_в}\frac{\mu_к}{m_к} = 3.$

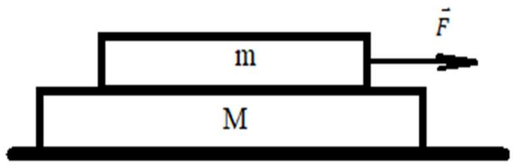
Задача 2. (20 баллов). Стальной шарик массы *m* подвешен к потолку на легкой пружине жесткости *k*. Его первоначально удерживают так, что пружина не растянута, а затем отпускают. Найдите среднюю скорость шарика при движении до остановки. Ускорение свободного падения *g*.

Решение:

После того как шарик отпустят, он будет совершать колебания в вертикальном направлении с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ относительно положения равновесия, которое находим из условия mg = kl, где l – удлинение пружины при равновесии. Средняя скорость будет равна перемещению груза до нижней точки 2l, деленому на половину периода.

<u>Ответ:</u> $V_{ср} = \frac{2g}{\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 3. (20 баллов). На горизонтальной поверхности стола покоится доска массы M. На горизонтальной верхней поверхности этой доски покоится другая доска массы m. Коэффициент трения скольжения между досками равен μ. Коэффициент трения скольжения между нижней доской и столом равен нулю. К верхней доске приложили горизонтальную силу F (см. рис). Найти ускорения $a_н$ и $a_в$ нижней и верхней досок и силу трения $F_{тр.}$, возникающую между досками.



Решение:

Проанализируем все возможные случаи.

1. Приложенная к верхней доске сила равна нулю (F=0). Тогда:

$$a_н = a_в = 0.$$

Сила трения (сила трения покоя) тоже равна нулю

$$(F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = 0).$$

2. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0) и тела движутся как единое целое.

В этом случае ускорения тел легко вычисляются и равны:

$$a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = \frac{F}{M+m}.$$

Поскольку нижняя доска движется с только что найденным ускорением $a_{\text{н}}$ благодаря лишь силе трения (силе трения покоя, т.к. доски не движутся друг относительно друга), находим:

$$F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = \frac{MF}{m+M}.$$

Однако, величина силы трения покоя всегда ограничена сверху величиной силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр.пок.}} \leq F_{\text{тр.ск.}}$$

Подставляем в последнее неравенство выражения для соответствующих сил, найдем предельную силу F, при которой доски еще могут двигаться как единое целое:

$$\frac{MF}{m+M} \leq mg\mu,$$

или

$$F \leq \frac{mg\mu}{M}(M+m) = mg\mu(1+\frac{m}{M}).$$

Если внешняя сила F будет удовлетворять неравенству

$$F > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right),$$

доски будут двигаться не как единое целое (одна относительно другой).

3. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0) но тела движутся не как единое целое. Напишем уравнения движения для каждой из досок:

$$ma_{\text{в}} = F - mg\mu,$$

$$Ma_{\text{н}} = mg\mu,$$

где $F_{\text{тр.ск.}} = mg\mu.$ – сила трения скольжения.

Запишем решения этих уравнений:

$$a_{\text{н}} = \frac{mg\mu}{M},$$

$$a_{\text{в}} = \frac{F - mg\mu}{m}, F \geq mg\mu.$$

Неравенство $F \geq mg\mu$ – это требование того, чтобы величина $a_{\text{в}}$ была неотрицательна.

Не трудно доказать, что неравенство $F \geq mg\mu$ заведомо выполнимо, т.к. выполняется неравенство

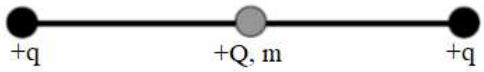
$$F > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

<u>Ответ:</u>

1. $a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = 0$, $F_{\text{тр.}} \equiv F_{\text{тр.пок.}} = 0$, если F=0. Доски покоятся друг относительно друга и относительно стола.

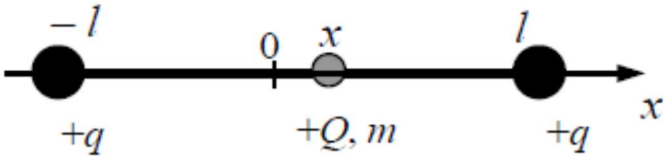
2. $a_н = a_в = \frac{F}{M+m}$. $F_{тр.} \equiv F_{тр.пок.} = \frac{MF}{m+M}$, если $0 \le F \le mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right)$. Доски покоятся друг относительно друга, но как единое целое движутся относительно стола.

3. $a_н = \frac{mg\mu}{M}$, $a_в = \frac{F-mg\mu}{m}$, $F_{тр.ск.} = mg\mu$, если $F > mg\mu\left(1+\frac{m}{M}\right)$. Доски движутся и относительно друг друга , и относительно стола.



Задача 4. (20 баллов). Бусинка с положительным зарядом Q>0 и массой m скользит по гладкой горизонтальной направляющей длины $2l$.На концах направляющей находятся положительные зарядыq>0 (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен Т.Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 4 раза? Считать, что смещение бусинки относительно положения равновесия очень мало.

Решение:



При небольшом смещении бусинки от положения равновесия на нее действует возвращающая сила:

$$F = \frac{kQq}{(l+x)^2} - \frac{kQq}{(l-x)^2} = kQq\frac{(l-x)^2-(l+x)^2}{(l+x)^2\,(l-x)^2} =$$

$$= -4lkQq\frac{x}{(l+x)^2\,(l-x)^2} = -4lkQq\frac{x}{[(l+x)(l-x)]^{\,2}} =$$

$$= -4lkQq\frac{x}{(l^2-x^2)^2} = -4lkQq\frac{x}{l^4\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^2}$$

Так как $|x| \ll l$, то $\left(l-\frac{x^2}{l^2}\right) \approx 1$, поэтому $F = -4lkQq\frac{x}{l^4} = -\frac{4kQq}{l^3}x$

Следовательно, сила пропорциональна смещению x. Ускорение бусинки, в соответствии со вторым законом Ньютона, $ma = -\frac{4lkQq}{l^3}x$, пропорционально смещению.

Известно из теории гармонических колебаний, если при движении тела для ускорения и координаты тела выполняется соотношение $a + \omega^2 x = 0$, то координата меняется по закону гармонических колебаний $x = x_0\, cos\omega t$ и период равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

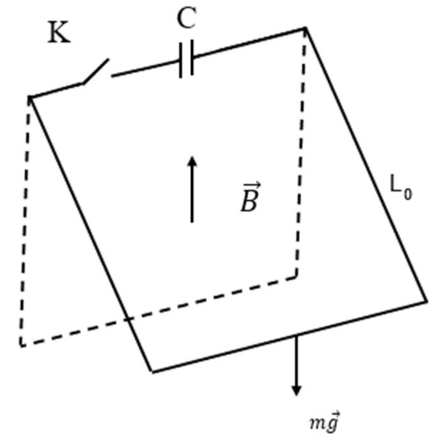
Для бусинки $a + \frac{4kQq}{m\,l^3}x = 0$. Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия бусинка совершает гармонические колебания, для которых $\omega = \sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}} = \pi\sqrt{\frac{m\,l^3}{kQq}}.$$

<u>Ответ:</u> Если заряд бусинки увеличить в 4 раза, период колебаний уменьшится в 2 раза.

Задача 5. (20 баллов). Проводящий стержень массы m и длины L подвешен горизонтально на двух лёгких проводящих проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией B. Длина проводов L_0. К точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкости C, заряженный до разности потенциалов U. В некоторый момент замыкают ключ и конденсатор начинает разряжаться через проводящий стержень. Определить максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после замыкания ключа. Считать, что разряд происходит за очень малое время.

Решение:



При подключении конденсатора по стержню начинает идти ток I, благодаря чему на стержень действует сила:

$$F_a = IBL,$$

направленная перпендикулярно стержню и вектору $\vec{B}$. Так как время Δt разряда конденсатора мало, то можно считать, что мало также и происходящее за это время смещение стержня от положения равновесия. Стержень лишь получит в горизонтальном направлении некоторый импульс $\bar{P}$. Разбив время t на малые промежутки Δt, в течение каждого из которых можно силу считать постоянной, получим:

$$p = \sum_i F_i \Delta t = BL \sum_i I_i \Delta t = BL \sum_i \frac{q_i}{\Delta t} \Delta t = BLq,$$

где q - заряд, прошедший по стержню при полном разряде конденсатора

$$q = CU$$

Тогда скорость стержня приобретенная в результате действия магнитного поля будет равна:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{BLCU}{m}$$

Угол отклонения системы от положения равновесия найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL_0(1 - cos\alpha) = 2mgL_0 sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Откуда получим значение угла:

<u>Ответ: </u> $\alpha = 2\text{arcsin}\left(\frac{BLCU}{2m\sqrt{gL_0}}\right)$